

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală

7 februarie 2026

Clasa a V-a

Barem de notare

Subiectul 1 (21p)

Se consideră șirul de numere: 4, 10, 28, 82, 244, 730, 2188,....

- Aflați ultima cifră a numărului de pe locul 2026.
- Determinați restul împărțirii sumei primilor 2026 termeni la 5.

Soluție:

a)	$a_1 = 4 = 1 + 3^1, a_2 = 10 = 1 + 3^2,$ $a_3 = 28 = 1 + 3^3, a_4 = 82 = 1 + 3^4,$ $a_5 = 244 = 1 + 3^5, a_6 = 730 = 1 + 3^6,$ $a_7 = 2188 = 1 + 3^7$	3p
	$a_{2026} = 1 + 3^{2026}$	3p
	$U(3^{2026}) = U(3^2) = 9 \Rightarrow U(a_{2026}) = 0$	3p
b)	$S = (1 + 3^1) + (1 + 3^2) + (1 + 3^3) + \dots + (1 + 3^{2026}) =$	3p
	$\left(\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{2026 \text{ termeni}} \right) + (3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2026}) =$	3p
	$2026 + [(3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + (3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8) + \dots + (3^{2021} + 3^{2022} + 3^{2023} + 3^{2024}) + (3^{2025} + 3^{2026})]$	3p
	$U(S) = U(6 + 0 + 2) = 8 \Rightarrow r = 3$	3p

Subiectul 2 (21p)

- Un număr natural a are 225 cifre și suma cifrelor 2025. Calculați suma cifrelor numărului $a + 2026$.

b) Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{xyz}$ care împărțite la $\overline{yz}$ dau câtul 4 și restul $\overline{yz} - 4$.

Soluție:

a)	$225 \cdot 9 = 2025$, deci a are toate cifrele egale cu 9	3p
	$a + 2026 = \underbrace{999 \dots 9}_{225 \text{ cifre}} + 2026 = \underbrace{10 \dots 02025}_{226 \text{ cifre}}$	3p
	Suma cifrelor = $1 + 2 + 2 + 5 = 10$	3p
b)	$\overline{xyz} = 4 \cdot \overline{yz} + \overline{yz} - 4$	3p
	$100x = 4 \cdot \overline{yz} - 4$	3p
	$25x = \overline{yz} - 1 \Rightarrow x$ poate fi: 1, 2 sau 3	3p
	$\overline{xyz}$ poate fi: 126, 251 sau 376	3p

Subiectul 3 (21p)

Tatăl are cu 6 ani mai puțin decât mama și fiica la un loc. Peste 6 ani, fiica va avea a treia parte din vârsta mamei și toți trei vor avea împreună 108 ani. Ce vârstă are fiecare acum?

Soluție:

t-vârsta tatălui în prezent, m-vârsta mamei în prezent, f-vârsta fiicei în prezent Suma vârstelor în prezent este: $108 - 3 \cdot 6 = 90$ (ani) $\Rightarrow t + m + f = 90$	3p
$t = m + f - 6$	3p
$t + t + 6 = 90 \Rightarrow t = 42$ (ani)	3p
$m + f = 48$	3p
$m + 6 = 3(f + 6)$	3p
$3f + 18 - 6 + f = 48 \Rightarrow 4f = 36 \Rightarrow f = 9$ (ani)	3p
$m = 48 - 9 \Rightarrow m = 39$ (ani)	3p

Subiectul 4 (21p)

Strada Victoriei nr.132-134

Tg-Jiu, cod 210234

Telefon: 0253-227177

Fax : 0253-224750

<http://isj.gj.edu.ro>, e-mail: isjgorj@yahoo.com, isjgj@utgjiu.ro

Într-un șir de numere naturale $x_1, x_2, x_3, \dots$, suma oricăror patru termeni consecutivi este 80. Aflați produsul $x_{2025} \cdot x_{2026}$, știind că $x_{23} = 56$ și $x_{56} = 23$.

(G.M)

Soluție:

Din: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 80$ $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 80$ $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 80$ $x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 80$ $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 80$	3p
Obținem, $x_1 = x_5, x_2 = x_6, x_3 = x_7, x_4 = x_8$	3p
Prin urmare, $x_3 = x_7 = x_{11} = \dots = x_{23} = \dots = x_{2027} = 56$	3p
și $x_4 = x_8 = x_{12} = \dots = x_{56} = \dots = x_{2028} = 23$	3p
Cum $x_{2025} + x_{2026} + x_{2027} + x_{2028} = 80$,	3p
avem $x_{2025} + x_{2026} = 1$	3p
Deoarece x_{2025} și x_{2026} sunt numere naturale cu suma 1, rezultă $x_{2025} \cdot x_{2026} = 0$	3p

Notă:

Se acordă 16 puncte din oficiu.